Sobre álgebras de semi-Nelson centradas

Juan Manuel Cornejo [(1)] y Hernán Javier San Martín [(2)]

CONICET
[(1)] Departamento de Matemática, UNS
[(2)] Departamento de Matemática, FCE, UNLP.

Junio de 2019

Algebras de Kleene

Un álgebra de De Morgan es un álgebra $(A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$ tal que $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ es un retículo distributivo acotado y $\sim$ satisface las ecuaciones

1. $\sim\sim x = x$,
2. $\sim (x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$.

Algebras de Kleene

Un álgebra de De Morgan es un álgebra $(A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$ tal que $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ es un retículo distributivo acotado y $\sim$ satisface las ecuaciones

1. $\sim\sim x = x$,
2. $\sim (x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$.

Un álgebra de Kleene es un álgebra de De Morgan la cual satisface la desigualdad

$$x \wedge \sim x \leq y \vee \sim y.$$

Algebras de Kleene

Un álgebra de De Morgan es un álgebra $(A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$ tal que $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ es un retículo distributivo acotado y $\sim$ satisface las ecuaciones

1. $\sim\sim x = x$,
2. $\sim (x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$.

Un álgebra de Kleene es un álgebra de De Morgan la cual satisface la desigualdad

$$x \wedge \sim x \leq y \vee \sim y.$$

Un álgebra de Kleene se llama centrada si tiene un centro. Es decir, si existe un elemento **c** tal que

$$\sim \mathbf{c} = \mathbf{c}$$

Este elemento es necesariamente único.

Algebras de Kleene

- Kalman J.A., Lattices with involution. Trans. Amer. Math. Soc. 87, 485–491 (1958).

Algebras de Kleene

- Kalman J.A., Lattices with involution. Trans. Amer. Math. Soc. 87, 485–491 (1958).

Si L es un retículo distributivo acotado entonces

$$\mathrm{K}(L) := \{(a, b) \in L \times L : a \wedge b = 0\}$$

es un álgebra de Kleene centrada definiendo

$$\begin{aligned}(a, b) \vee (d, e) &:= (a \vee d, b \wedge e),\\ (a, b) \wedge (d, e) &:= (a \wedge d, b \vee e),\\ \sim (a, b) &:= (b, a),\end{aligned}$$

$(0, 1)$ como el primer elemento, $(1, 0)$ como el último elemento y $(0, 0)$ como el centro.

Algebras de Nelson

Un álgebra de Nelson es un álgebra de Kleene tal que satisface las siguientes condiciones:

1. Para cada x, y existe

$$x \to y := x \to_{\mathrm{Hey}} (\sim x \vee y),$$

   siendo $\to_{\mathrm{Hey}}$ la implicación de Heyting.

2. Para cada x, y, z vale la igualdad

$$(x \wedge y) \to z = x \to (y \to z).$$

Algebras de Nelson

Un álgebra de Nelson es un álgebra de Kleene tal que satisface las siguientes condiciones:

1. Para cada x, y existe
$$x \to y := x \to_{\mathrm{Hey}} (\sim x \vee y),$$
siendo $\to_{\mathrm{Hey}}$ la implicación de Heyting.
2. Para cada x, y, z vale la igualdad
$$(x \wedge y) \to z = x \to (y \to z).$$

La clase de álgebras de Nelson forma una variedad.

Relación entre álgebras de Heyting y álgebras de Nelson

- Vakarelov D., Notes on N-lattices and constructive logic with strong negation. Studia Logica 34, 109–125 (1977).

Relación entre álgebras de Heyting y álgebras de Nelson

- Vakarelov D., Notes on N-lattices and constructive logic with strong negation. Studia Logica 34, 109–125 (1977).

1. Si H es un álgebra de Heyting entonces $\mathrm{K}(H)$ es un álgebra de Nelson, definiendo la implicación en $\mathrm{K}(H)$ como

$$(a, b) \to (d, e) = (a \to d, a \wedge e).$$

2. Sea T un álgebra de Nelson. La relación binaria $\equiv$ sobre T dada por

$$x \equiv y \text{ si y sólo si } x \to y = 1 \text{ e } y \to x = 1$$

es una relación de equivalencia compatible con las operaciones $\wedge$, $\vee$ and $\to$. Más aún, $\mathrm{F}(T) := T/\equiv$ es un álgebra de Heyting.

Relación entre álgebras de Heyting y álgebras de Nelson

1. Si H es un álgebra de Heyting entonces $H \cong \mathrm{F}(\mathrm{K}(H))$.
2. Si T es un álgebra de Nelson entonces T es isomorfa a una subálgebra de $\mathrm{K}(\mathrm{F}(T))$.

Relación entre álgebras de Heyting y álgebras de Nelson

1. Si H es un álgebra de Heyting entonces $H \cong \mathrm{F}(\mathrm{K}(H))$.
2. Si T es un álgebra de Nelson entonces T es isomorfa a una subálgebra de $\mathrm{K}(\mathrm{F}(T))$.

Más aún, existe una equivalencia entre la categoría de álgebras de Heyting y la categoría de álgebras de Nelson centradas

Relación entre álgebras de Heyting y álgebras de Nelson

1. Si H es un álgebra de Heyting entonces $H \cong \mathrm{F}(\mathrm{K}(H))$.
2. Si T es un álgebra de Nelson entonces T es isomorfa a una subálgebra de $\mathrm{K}(\mathrm{F}(T))$.

Más aún, existe una equivalencia entre la categoría de álgebras de Heyting y la categoría de álgebras de Nelson centradas

Estos resultados (siguiendo una construcción distinta) fueron también obtenidos (en un marco más general) en el siguiente paper:

- Cignoli R., The class of Kleene algebras satisfying an interpolation property and Nelson algebras. Algebra Universalis 23, 262–292 (1986).

Relación entre las álgebras de Heyting (Hey) y las álgebras de Nelson centradas ($\mathrm{N}_{\mathbf{c}}$)

- Sagastume M., Categorical equivalence between centered Kleene algebras with condition (CK) and bounded distributive lattices (Comunicación personal, 2004).

Relación entre las álgebras de Heyting (Hey) y las álgebras de Nelson centradas ($\mathrm{N}_{\mathbf{c}}$)

- Sagastume M., Categorical equivalence between centered Kleene algebras with condition (CK) and bounded distributive lattices (Comunicación personal, 2004).

1. Si $H \in \mathrm{Hey}$ entonces $\mathrm{K}(H) \in \mathrm{N}_{\mathbf{c}}$.
2. Si $f : H \to G \in \mathrm{Hey}$ entonces $\mathrm{K}(f) : \mathrm{K}(H) \to \mathrm{K}(G)$ dada por $\mathrm{K}(f)(a, b) = (f(a), f(b))$ es un morfismo en $\mathrm{N}_{\mathbf{c}}$.

Relación entre las álgebras de Heyting (Hey) y las álgebras de Nelson centradas ($\mathrm{N}_{\mathbf{c}}$)

- Sagastume M., Categorical equivalence between centered Kleene algebras with condition (CK) and bounded distributive lattices (Comunicación personal, 2004).

1. Si $H \in \mathrm{Hey}$ entonces $\mathrm{K}(H) \in \mathrm{N}_{\mathbf{c}}$.
2. Si $f : H \to G \in \mathrm{Hey}$ entonces $\mathrm{K}(f) : \mathrm{K}(H) \to \mathrm{K}(G)$ dada por $\mathrm{K}(f)(a, b) = (f(a), f(b))$ es un morfismo en $\mathrm{N}_{\mathbf{c}}$.
3. Si $T \in \mathrm{N}_{\mathbf{c}}$ entonces

$$\mathrm{C}(T) := \{x \in T : x \geq \mathbf{c}\}$$

   es un álgebra de Heyting restringiendo ciertas operaciones de T.
4. Si $f : T \to U \in \mathrm{N}_{\mathbf{c}}$ entonces $\mathrm{C}(f) : \mathrm{C}(T) \to \mathrm{C}(U)$ dada por $\mathrm{C}(f)(x) = f(x)$ es un morfismo en Hey.

Relación entre las álgebras de Heyting (Hey) y las álgebras de Nelson centradas ($\mathrm{N}_{\mathbf{c}}$)

1. Si $H \in \mathrm{Hey}$ entonces $\alpha : H \to \mathrm{C}(\mathrm{K}(H))$ dada por
$$\alpha(a) = (a, a \to 0)$$
es un isomorfismo.
2. Si $T \in \mathrm{N}_{\mathbf{c}}$ entonces $\beta : T \to \mathrm{K}(\mathrm{C}(T))$ dada por
$$\beta(x) = (x \vee \mathbf{c}, \sim x \vee \mathbf{c})$$
es un isomorfismo.
3. Los funtores $\mathrm{K} : \mathrm{Hey} \to \mathrm{N}_{\mathbf{c}}$ y $\mathrm{C} : \mathrm{N}_{\mathbf{c}} \to \mathrm{Hey}$ establecen una equivalencia entre Hey y $\mathrm{N}_{\mathbf{c}}$ con isomorfismos naturales α y β.

Algebras de semi-Heyting

- Sankappanavar H.P, Semi-Heyting algebras: an abstraction from Heyting algebras. Actas del IX Congreso Dr. A.R. Monteiro, 33–66 (2008).

Un **álgebra de semi-Heyting** es un álgebra $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$ tal que $(H, \wedge, \vee, 0, 1)$ es un retículo acotado y se satisfacen las siguientes ecuaciones:

1. $a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge b$,
2. $a \wedge (b \rightarrow d) = a \wedge [(a \wedge b) \rightarrow (a \wedge d)]$,
3. $a \rightarrow a = 1$.

Relación entre las álgebras de semi-Heyting y las álgebras de semi-Nelson

Las **álgebras de semi-Nelson** se introducen en

- Cornejo J.M. and Viglizzo I., Semi-Nelson Algebras. Order, vol. 35, Nro. 1, 23–45 (2018).

Relación entre las álgebras de semi-Heyting y las álgebras de semi-Nelson

Las **álgebras de semi-Nelson** se introducen en

- Cornejo J.M. and Viglizzo I., Semi-Nelson Algebras. Order, vol. 35, Nro. 1, 23–45 (2018).

1. Si H es un álgebra de semi-Heyting entonces $\mathrm{K}(H)$ es un álgebra de semi-Nelson.
2. Si T es un álgebra de semi-Nelson entonces $F(T) = T/\equiv$ es un álgebra de semi-Heyting.
3. Si H es un álgebra de semi-Heyting entonces $H \cong F(\mathrm{K}(H))$.
4. Si T es un álgebra de semi-Nelson entonces T es isomorfa a una subálgebra de $\mathrm{K}(F(T))$.

Nuestro trabajo

Existe una equivalencia entre la categoría de álgebras de semi-Heyting y la categoría de álgebras de semi-Nelson centradas.

Hay dos posibles construcciones:

1. Completar la construcción dada por Cornejo y Viglizzo (construcción que a su vez es extensión de la dada por Vakarelov).
2. Extender la construción dada por Sagastume.

Nuestro trabajo

Existe una equivalencia entre la categoría de álgebras de semi-Heyting y la categoría de álgebras de semi-Nelson centradas.

Hay dos posibles construcciones:

1. Completar la construcción dada por Cornejo y Viglizzo (construcción que a su vez es extensión de la dada por Vakarelov).
2. Extender la construcción dada por Sagastume.

- Cornejo J.M. y San Martín H.J., A categorical equivalence between semi-Heyting algebras and centered semi-Nelson algebras. Logic Journal of the IGPL, vol. 26, no. 4, 408–428 (2018).

Observaciones finales

Un retículo de Nelson es un retículo residuado conmutativo integral con 0 e involutivo que satisface una cierta ecuación adicional.

1. La variedad de álgebras de Nelson y la variedad de retículos de Nelson son equivalentes por términos. En particular, si T es un álgebra de Nelson y $\to$ es la implicación del álgebra T entonces la implicación $\hat{\to}$ del correspondiente retículo de Nelson está dada por

$$x \hat{\to} y = (x \to y) \wedge (\sim y \to \sim x).$$

- Busaniche M. and Cignoli R., Constructive Logic with Strong Negation as a Substructural Logic. Journal of Logic and Computation 20 (4), 761–793 (2010).

En todo retículo residuado conmutativo involutivo vale que:

$$x \to y = \neg(x * \neg y),$$

$$x * y = \neg(x \to \neg y).$$

Observaciones finales

Existe una equivalencia entre una categoría denominada KSH (cuya variedad asociada contiene a la variedad de los retículos de Nelson centrados) y la categoría de las álgebras de semi-Heyting.

- Jansana R. and San Martín H.J., On Kalman's functor for bounded hemi-implicative semilattices and hemi-implicative lattices. Logic Journal of the IGPL, vol. 26, no. 1, 47–82 (2018).

Observaciones finales

La categoría KSH y la categoría de álgebras de semi-Nelson centradas son equivalentes.

Observaciones finales

La categoría KSH y la categoría de álgebras de semi-Nelson centradas son equivalentes.

1. La variedad KSH y la variedad de álgebras de semi-Nelson centradas son equivalentes por términos (hay que hacer una construcción distinta a la hecha para probar la equivalencia por términos entre la variedad de álgebras de Nelson y la variedad de álgebras de retículos de Nelson).